COMPTE RENDU

DES SÉANCES

DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

SÉANCE DU LUNDI 30 AOUT 1841.

PRÉSIDENCE DE M. SERRES.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS

DES MEMBRES ET DES CORRESPONDANTS DE L'ACADÉMIE.

M. le **Président** annonce la mort de M. *Daubuisson*, membre correspondant de la section de Minéralogie.

CALCUL INTÉGRAL. — *Sur la réduction nouvelle de la fonction principale qui vérifie une équation caractéristique homogène, et sur les conséquences qu'entraîne cette réduction; par* M. **Augustin Cauchy**.

2e PARTIE. — DÉTERMINATION DE LA FONCTION PRINCIPALE CORRESPONDANTE A UNE ÉQUATION CARACTÉRISTIQUE HOMOGÈNE.

§ II. *Sections infiniment petites faites dans la surface des ondes et dans la surface caractéristique par des plans correspondants.*

« Les mêmes choses étant posées que dans le § Ier, considérons, au bout du temps t, deux points correspondants

$$C, D$$

situés le premier sur la surface caractéristique, le second sur la surface des

ondes; et soient

$$\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z}$$

les coordonnées rectangulaires du premier point,

$$x,\ y,\ z$$

celles du second. Non-seulement ces coordonnées vérifieront respectivement les équations des deux surfaces, savoir,

$$(1)\qquad \mathrm{F}(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z},\ t) = 0, \qquad\qquad (2)\qquad \mathcal{F}(x,\ y,\ z,\ t) = 0;$$

mais de plus, si l'on pose, pour abréger,

$$\mathrm{S} = \mathrm{F}(\mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z},\ t), \qquad \mathcal{S} = \mathcal{F}(x,\ y,\ z,\ t),$$

on aura encore (voir la page 188)

$$(3)\qquad \mathrm{x}x + \mathrm{y}y + \mathrm{z}z + t^2 = 0,$$

et

$$(4)\qquad \frac{x}{\mathrm{D_x S}} = \frac{y}{\mathrm{D_y S}} = \frac{z}{\mathrm{D_z S}},$$

$$(5)\qquad \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{D}_x \mathcal{S}} = \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{D}_y \mathcal{S}} = \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{D}_z \mathcal{S}}.$$

Si d'ailleurs, comme il arrive ordinairement dans les problèmes de mécanique, $\mathrm{F}(x,\ y,\ z,\ t)$ est une fonction entière de t^2, on aura

$$\mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z},t) = \mathrm{F}(\mathrm{x},\mathrm{y},\mathrm{z},-t) = \mathrm{F}(-\mathrm{x},-\mathrm{y},-\mathrm{z},t) = \mathrm{F}(-\mathrm{x},-\mathrm{y},-\mathrm{z},-t),$$

et par suite

$$\mathcal{F}(x,y,z,t) = \mathcal{F}(x,y,z,-t) = \mathcal{F}(-x,-y,-z,t) = \mathcal{F}(-x,-y,-z,-t).$$

Donc alors toute droite menée par l'origine O des coordonnées sera un diamètre de la surface caractéristique et de la surface des ondes, et ces deux surfaces auront pour centre commun l'origine elle-même.

» Soient maintenant

$$(6)\qquad \mathrm{r} = \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2 + \mathrm{z}^2}, \qquad\qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

les deux rayons vecteurs OC, OD menés de l'origine aux points correspondants C, D; et δ l'angle compris entre les rayons vecteurs. On aura

$$(7)\qquad \mathrm{x}x + \mathrm{y}y + \mathrm{z}z = \mathrm{r}r\cos\delta,$$

et de l'équation (2) réduite à

$$(8)\qquad \mathrm{r}r\cos\delta = -t^2,$$

on conclura que δ est un angle obtus. Mais, si le point D, situé sur la surface des ondes à l'extrémité d'un certain diamètre, est transporté à l'autre extrémité de ce même diamètre, les coordonnées

$$x,\ y,\ z$$

changeront de signes, c'est-à-dire que l'on devra remplacer

$$x,\ y,\ z \quad \text{par} \quad -x,\ -y,\ -z.$$

Or, après ce changement de signe, qui n'altérera point les formules (2), (4), (5), la formule (2) se trouvera remplacée par la suivante

$$(9)\qquad \mathrm{x}x + \mathrm{y}y + \mathrm{z}z = t^2;$$

et alors, comme on se trouvera conduit non plus à l'équation (7), mais à celle-ci

$$(10)\qquad rr\cos\delta = t^2,$$

les points correspondants C, D de la surface caractéristique et de la surface des ondes seront évidemment situés de manière que l'angle δ, compris entre les rayons vecteurs OC, OD, se réduise à un angle aigu.

» Nommons à présent p, q les angles polaires qui déterminent la direction de la normale menée par le point D à la surface des ondes, cette normale étant prolongée dans un sens tel qu'elle forme avec le prolongement du rayon vecteur r un angle aigu; et faisons

$$(11)\qquad u = \cos p,\quad v = \sin p\cos q,\quad w = \sin p\sin q.$$

Le cosinus de l'angle aigu dont il s'agit sera

$$(12)\qquad \frac{ux + vy + wz}{r},$$

et par suite le trinome

$$ux + vy + wz$$

sera une quantité positive. Si d'ailleurs on pose, pour abréger,

$$(13) \qquad \mathrm{R} = [(\mathrm{D_x S})^2 + (\mathrm{D_y S})^2 + (\mathrm{D_z S})^2]^{\frac{1}{2}},$$

$$(14) \qquad \mathfrak{R} = [(\mathrm{D}_x \mathfrak{s})^2 + (\mathrm{D}_y \mathfrak{s})^2 + (\mathrm{D}_z \mathfrak{s})^2]^{\frac{1}{2}};$$

on aura

$$(15) \qquad \frac{u}{\mathrm{D}_x \mathfrak{s}} = \frac{v}{\mathrm{D}_y \mathfrak{s}} = \frac{w}{\mathrm{D}_z \mathfrak{s}} = \pm \frac{1}{\mathfrak{R}},$$

et de la formule (15) combinée avec l'équation (5) on tirera

$$\frac{u}{\mathrm{x}} = \frac{v}{\mathrm{y}} = \frac{w}{\mathrm{z}} = \pm \frac{1}{\mathrm{r}}.$$

On devra même, dans la dernière formule, réduire le double signe au signe $+$, attendu que, les trois rapports

$$\frac{u}{\mathrm{x}}, \quad \frac{v}{\mathrm{y}}, \quad \frac{w}{\mathrm{z}}$$

étant égaux, chacun d'eux sera encore égal à la fraction

$$\frac{ux + vy + wz}{\mathrm{x}x + \mathrm{y}y + \mathrm{z}z} = \frac{ux + vy + wz}{\mathrm{r}r \cos \delta}$$

dont les deux termes seront positifs. On aura donc

$$(16) \qquad \frac{u}{\mathrm{x}} = \frac{v}{\mathrm{y}} = \frac{w}{\mathrm{z}} = \frac{ux + vy + wz}{\mathrm{r}r \cos \delta} = \frac{1}{\mathrm{r}},$$

et par suite

$$(17) \qquad \frac{ux + vy + wz}{r} = \cos \delta.$$

Le premier membre de la formule (17) étant précisément l'expression (12), il en résulte que l'angle aigu δ, compris entre les rayons vecteurs correspondants r, r, est en même temps l'angle aigu compris entre le rayon vec-

teur r ou OD, et la normale menée par le point D à la surface des ondes. Au reste cette conclusion pouvait être facilement prévue, puisqu'en vertu d'un théorème énoncé dans un précédent Mémoire (voir le 3[e] théorème de la page 185), le plan tangent au point D à la surface des ondes sera perpendiculaire au rayon vecteur r.

» On tire de la formule (16)

$$(18) \qquad \mathrm{x} = u\mathrm{r}, \quad \mathrm{y} = v\mathrm{r}, \quad \mathrm{z} = w\mathrm{r}.$$

Si l'on substitue ces valeurs de x, y, z dans l'équation caractéristique

$$\mathrm{F}(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}, t) = 0,$$

elle donnera

$$\mathrm{F}(u\mathrm{r}, v\mathrm{r}, w\mathrm{r}, t) = 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\mathrm{F}\left(u, v, w, \frac{t}{\mathrm{r}}\right) = 0;$$

et par suite

$$\frac{t}{\mathrm{r}} = \omega,$$

ou

$$(19) \qquad \mathrm{r} = \frac{t}{\omega},$$

ω désignant une racine positive de l'équation

$$(20) \qquad \mathrm{F}(u, v, w, \omega) = 0.$$

Or, en vertu des formules (18), (19), l'équation (9) deviendra

$$(21) \qquad ux + vy + wz = \omega t.$$

Cette dernière, lorsqu'on y considère x, y, z comme variables, représente évidemment un plan qui, passant par le point D, coupe à angles droits la normale menée par ce point à la surface des ondes. Ce plan est donc précisément le plan tangent à la surface des ondes. Donc les coordonnées x, y, z du point D vérifieront non-seulement l'équation (21), mais encore

ses dérivées relatives aux angles p, q; ou, ce qui revient au même, eu égard à la condition

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1 \tag{22}$$

à laquelle sont assujétis u, v, w, elles vérifieront la formule

$$\frac{x - t\mathrm{D}_u\varpi}{u} = \frac{y - t\mathrm{D}_v\varpi}{v} = \frac{z - t\mathrm{D}_w\varpi}{w}, \tag{23}$$

où l'on considère ϖ comme une fonction de u, v, w, déterminée par l'équation (20). D'ailleurs, comme, en vertu de l'équation (20), ϖ sera une fonction de u, v, w, homogène et du premier degré, on aura

$$u\mathrm{D}_u\varpi + v\mathrm{D}_v\varpi + w\mathrm{D}_w\varpi = \varpi,$$

et par suite on tirera des formules (21), (22), (23),

$$\frac{x - t\mathrm{D}_u\varpi}{u} = \frac{y - t\mathrm{D}_v\varpi}{v} = \frac{z - t\mathrm{D}_w\varpi}{w} = 0,$$

$$\frac{x}{\mathrm{D}_u\varpi} = \frac{y}{\mathrm{D}_v\varpi} = \frac{z}{\mathrm{D}_w\varpi} = t = \frac{r}{[(\mathrm{D}_u\varpi)^2 + (\mathrm{D}_v\varpi)^2 + (\mathrm{D}_w\varpi)^2]^{\frac{1}{2}}}, \tag{24}$$

puis de celle-ci, combinée avec la formule (17),

$$\cos\delta = \frac{\varpi}{[(\mathrm{D}_u\varpi)^2 + (\mathrm{D}_v\varpi)^2 + (\mathrm{D}_w\varpi)^2]^{\frac{1}{2}}}. \tag{25}$$

Telle sera l'équation à l'aide de laquelle on pourra déterminer $\cos\delta$ en fonction de u, v, w, ou, ce qui revient au même, en fonction des angles p, q.

» Passons maintenant du point D ou (x, y, z), situé sur la surface des ondes, au point C ou $(\mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z})$, situé sur la surface caractéristique; et nommons

$$\mathrm{u},\ \mathrm{v},\ \mathrm{w}$$

ce que deviennent dans ce passage les trois quantités u, v, w. Il est clair qu'à la place des formules (15), (16), (17) et (18), on obtiendra les sui-

vantes

(26)
$$\frac{u}{D_x S} = \frac{v}{D_y S} = \frac{w}{D_z S} = \pm \frac{1}{R},$$

et

(27)
$$\frac{u}{x} = \frac{v}{y} = \frac{w}{z} = \frac{ux + vy + wz}{rr \cos \delta} = \frac{1}{r},$$

(28)
$$\frac{ux + vy + wz}{r} = \cos \delta,$$

(29)
$$x = ur, \quad y = vr, \quad z = wr.$$

La formule (28) montre que l'angle aigu δ compris entre les rayons vecteurs r, r est en même temps l'angle aigu compris entre le rayon vecteur r ou OC et la normale menée par le point C à la surface caractéristique. Cette conclusion pourrait encore se déduire du théorème 3 de la page 185.

» Concevons à présent qu'aux points correspondants

C et D

on substitue deux autres points correspondants

G et H

situés, le premier sur la surface caractéristique tout près du point C, le second sur la surface des ondes tout près du point D. Soient d'ailleurs

$$x_{,}, \ y_{,}, \ z_{,}$$

les coordonnées du point G, et

$$x_{,}, \ y_{,}, \ z_{,}$$

les coordonnées du point H. Les formules (1), (2), (3), (4) et (5) continueront de subsister quand on y remplacera x, y, z par $x_{,}, y_{,}, z_{,}$, et x, y, z par $\mathrm{x}_{,}, \mathrm{y}_{,}, \mathrm{z}_{,}$, c'est-à-dire, en d'autres termes, quand on attribuera aux variables

$$x, y, z, \quad \mathrm{x}, \mathrm{y}, \mathrm{z}$$

les accroissements très-petits

$$x_{,}-x,\ y_{,}-y,\ z_{,}-z,\ \mathrm{x}_{,}-\mathrm{x},\ \mathrm{y}_{,}-\mathrm{y},\ \mathrm{z}_{,}-\mathrm{z}.$$

Or si l'on développe, suivant les puissances ascendantes de ces accroissements, les variations que subiront les quantités

$$\mathrm{S},\ \mathrm{D_x S},\ \mathrm{D_y S},\ \mathrm{D_z S},$$

et si, dans les développements obtenus, on néglige les infiniment petits d'un ordre supérieur au second, alors on tirera de l'équation (1)

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{l} (\mathrm{x}_{,}-\mathrm{x})\mathrm{D_x S}+(\mathrm{y}_{,}-\mathrm{y})\mathrm{D_y S}+(\mathrm{z}_{,}-\mathrm{z})\mathrm{D_z S} \\ +\frac{1}{2}[(\mathrm{x}_{,}-\mathrm{x})^2\mathrm{D_x^2 S}+(\mathrm{y}_{,}-\mathrm{y})^2\mathrm{D_y^2 S}+\ldots+2(\mathrm{y}_{,}-\mathrm{y})(\mathrm{z}_{,}-\mathrm{z})\mathrm{D_y D_z S}+\ldots]=0, \end{array}\right.$$

et la formule (4), que l'on peut écrire comme il suit

$$(31)\qquad \frac{\mathrm{D_x S}}{x}=\frac{\mathrm{D_y S}}{y}=\frac{\mathrm{D_z S}}{z}=\pm\frac{\mathrm{R}}{r},$$

entraînera cette autre formule

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{(x_{,}-x)\dfrac{\mathrm{D_x S}}{x}-(\mathrm{x}_{,}-\mathrm{x})\mathrm{D_x^2 S}-(\mathrm{y}_{,}-\mathrm{y})\mathrm{D_x D_y S}-(\mathrm{z}_{,}-\mathrm{z})\mathrm{D_x D_z S}}{x_{,}} \\ =\dfrac{(y_{,}-y)\dfrac{\mathrm{D_y S}}{y}-(\mathrm{x}_{,}-\mathrm{x})\mathrm{D_x D_y S}-(\mathrm{y}_{,}-\mathrm{y})\mathrm{D_y^2 S}-(\mathrm{z}_{,}-\mathrm{z})\mathrm{D_y D_z S}}{y_{,}} \\ =\dfrac{(z_{,}-z)\dfrac{\mathrm{D_z S}}{z}-(\mathrm{x}_{,}-\mathrm{x})\mathrm{D_x D_z S}-(\mathrm{y}_{,}-\mathrm{y})\mathrm{D_y D_z S}-(z_{,}-z)\mathrm{D_z^2 S}}{z_{,}}. \end{array}\right.$$

Enfin l'on tirera de la formule (9)

$$(33)\qquad \mathrm{x}_{,}x_{,}+\mathrm{y}_{,}y_{,}+\mathrm{z}_{,}z_{,}=\mathrm{x}x+\mathrm{y}y+\mathrm{z}z.$$

Soit maintenant s la distance du point H au plan tangent mené par le point D à la surface des ondes, ou, ce qui revient au même, la projection de la distance DH sur la normale menée par le point D à cette surface; on aura

$$(34)\qquad s=u(x-x_{,})+v(y-y_{,})+w(z-z_{,}).$$

Pareillement si l'on nomme s la distance du point G au plan tangent mené par le point C à la surface caractéristique, on aura

$$(35) \qquad \mathrm{s} = \mathrm{u}(\mathrm{x} - \mathrm{x}_{,}) + \mathrm{v}(\mathrm{y} - \mathrm{y}_{,}) + \mathrm{w}(\mathrm{z} - \mathrm{z}_{,});$$

et des formules (34), (35) on tirera, eu égard aux équations (18) et (29),

$$(36) \qquad \mathrm{r}s - r\mathrm{s} = \mathrm{x}_{,}x + \mathrm{y}_{,}y + \mathrm{z}_{,}z - \mathrm{x}x_{,} - \mathrm{y}y_{,} - \mathrm{z}z_{,}.$$

Cela posé, imaginons que l'on ajoute d'une part les numérateurs, d'autre part les dénominateurs des trois fractions comprises dans la formule (32), après les avoir respectivement multipliés par les facteurs

$$\mathrm{x}_{,} - \mathrm{x}, \quad \mathrm{y}_{,} - \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}_{,} - \mathrm{z};$$

alors, eu égard aux équations (30), (31), (33) et (36), on obtiendra pour résultat la fraction

$$(37) \qquad \pm \frac{\mathrm{r}s - r\mathrm{s}}{x_{,}(\mathrm{x}_{,} - \mathrm{x}) + y_{,}(\mathrm{y}_{,} - \mathrm{y}) + z_{,}(\mathrm{z}_{,} - \mathrm{z})} \frac{\mathrm{R}}{r},$$

qui devra être égale à chacune des trois autres, et par conséquent très-petite en même temps que les différences

$$x_{,} - x, \quad y_{,} - y, \quad z_{,} - z, \quad \mathrm{x}_{,} - \mathrm{x}, \quad \mathrm{y}_{,} - \mathrm{y}, \quad \mathrm{z}_{,} - \mathrm{z}.$$

Donc, la valeur de R étant généralement différente de zéro, le rapport

$$(38) \qquad \frac{\mathrm{r}s - r\mathrm{s}}{x_{,}(\mathrm{x}_{,} - \mathrm{x}) + y_{,}(\mathrm{y}_{,} - \mathrm{y}) + z_{,}(\mathrm{z}_{,} - \mathrm{z})}$$

devra lui-même être petit. Mais, eu égard aux formules (33), (18) et (34), on aura

$$x_{,}(\mathrm{x}_{,} - \mathrm{x}) + y_{,}(\mathrm{y}_{,} - \mathrm{y}) + z_{,}(\mathrm{z}_{,} - \mathrm{z}) = \mathrm{x}(x - x_{,}) + \mathrm{y}(y - y_{,}) + \mathrm{z}(z - z_{,})$$
$$= [u(x - x_{,}) + v(y - y_{,}) + w(z - z_{,})]\,\mathrm{r} = \mathrm{r}s.$$

Donc le rapport (38) se réduira simplement à

$$1 - \frac{r}{s}\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{r}};$$

et pour que ce rapport soit très-petit, il faudra que l'on ait sensiblement

(39) $$\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{r}} = \frac{s}{r},$$

ou, ce qui revient au même,

(40) $$\mathrm{s} = \frac{\mathrm{r}}{r} s.$$

En vertu de cette dernière équation, la distance s du point G au plan tangent, mené par le point C à la surface caractéristique, dépend uniquement du rapport $\frac{\mathrm{r}}{r}$ et de la distance s du point H au plan tangent mené par le point D à la surface des ondes. Donc, si le point H, très-rapproché du point D, varie sur la surface des ondes en restant toujours à la même distance du plan qui la touche en D, le point correspondant G variera sur la surface caractéristique de manière à rester toujours à la même distance du plan tangent qui la touche en C. Donc, si l'on nomme H, H′, H″,.... les diverses positions que prendra suffisamment le point D sur la surface des ondes, et G, G′, G″,.... les positions correspondantes du point G sur la surface caractéristique, les deux courbes

$$\mathrm{HH'H''}\ldots, \quad \text{et} \quad \mathrm{GG'G''}\ldots,$$

tracées sur les deux surfaces, seront les contours de deux sections planes et très-petites, faites dans les deux surfaces par des plans correspondants qui seront parallèles aux deux plans tangents menés par les points D et C.

» Comme nous l'avons remarqué dans les préliminaires, si, après avoir mené à une surface courbe, en un point donné, un plan tangent qui ne la traverse pas, on coupe cette surface par un second plan parallèle au premier, et séparé de celui-ci par une très-petite distance s, l'aire de la section ainsi obtenue sera sensiblement proportionnelle à s. On peut même observer qu'elle sera sensiblement égale au produit de s par la circonférence d'un cercle qui aurait pour rayon la moyenne géométrique entre les rayons de plus grande et de moindre courbure de la surface au point donné. Cette moyenne géométrique est ce que nous appellerons le *rayon de moyenne courbure*. Supposons en particulier que l'on détermine les rayons de moyenne courbure pour le point D de la surface des ondes, et pour le point correspondant C de la surface caractéristique. Si, le temps t

venant à varier, le point D se meut sur une certaine droite OD menée par l'origine O, le point C se mouvra lui-même sur une droite correspondante OC; et, non seulement les coordonnées

$$x,\ y,\ z; \quad \mathrm{x},\ \mathrm{y},\ \mathrm{z}$$

des points D et C varieront proportionnellement à t, mais on pourra encore en dire autant des rayons de moyenne courbure des deux surfaces en ces deux points, attendu que les deux surfaces, représentées par les équations homogènes (1) et (2), resteront toujours, comme on sait, semblables à elles-mêmes. D'ailleurs, les rayons vecteurs

$$r, \quad \mathrm{r},$$

mesurés constamment dans les mêmes directions OD, OC, croîtront aussi proportionnellement au temps. Donc les rayons de moyenne courbure des deux surfaces aux points D et C croîtront dans le même rapport que les rayons vecteurs

$$r, \quad \mathrm{r},$$

et pourront être représentés le premier par kr, le second par kr, les coefficients

$$k, \quad \mathrm{k}$$

étant déterminés pour chaque direction du rayon vecteur r, ou r. Il est en effet aisé de s'assurer que les coefficients k, k seront seulement fonctions des rapports

$$\frac{x}{r},\ \frac{y}{r},\ \frac{z}{r},$$

ou, ce qui revient au même, des rapports

$$\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{r}},\ \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{r}},\ \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{r}}.$$

Les trois derniers rapports se réduisant précisément aux trois quantités ci-dessus représentées par

$$u,\ v,\ w,$$

on peut dire encore que les deux coefficients k, k se réduiront toujours à des fonctions déterminées de u, v, w. D'ailleurs, les rayons de courbure moyenne qui correspondront aux points D et C étant représentés par les produits

$$kr \text{ et } \mathrm{kr},$$

si par ces points on mène : 1° deux plans tangents, l'un à la surface des ondes, l'autre à la surface caractéristique ; 2° des plans sécants, parallèles aux plans tangents, et séparés de ceux-ci par la très-petite distance

$$s \text{ ou } \mathrm{s},$$

les deux aires des deux sections obtenues

$$\mathrm{H\,H'\,H''}\ldots,\quad \mathrm{G\,G'\,G''}\ldots,$$

se trouveront sensiblement représentées par les produits

(41) $$2\pi krs,\quad 2\pi\mathrm{krs}.$$

» Concevons maintenant qu'à l'aide de rayons vecteurs menés des points H, H′, H″,... ou G, G′, G″, ... à l'origine des coordonnées, on projette les deux aires dont il s'agit : 1° sur les surfaces des sphères qui ont cette origine pour centre et pour rayons les rayons vecteurs r et r ; 2° sur la surface de la sphère qui a pour centre l'origine et pour rayon l'unité. Puisque les rayons vecteurs r et r, qui aboutissent aux points D et C, forment, en ces mêmes points, des angles égaux à δ avec les normales menées à la surface des ondes ou à la surface caractéristique ; les projections des aires

$$2\pi krs,\quad 2\pi\mathrm{krs},$$

sur les surfaces sphériques dont les rayons sont r et r, se réduiront évidemment aux deux produits

(42) $$2\pi krs\cos\delta,\quad 2\pi\mathrm{krs}\cos\delta.$$

Ajoutons qu'il suffira de diviser ces produits par les carrés de r et de r, pour obtenir les projections des mêmes aires sur la surface sphérique

dont le rayon est l'unité. Ces dernières projections seront donc

$$(43) \qquad 2\pi k \frac{s}{r} \cos \delta, \qquad 2\pi \mathrm{k} \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{r}} \cos \delta;$$

et, eu égard à la formule (39), la seconde pourra être réduite à

$$(44) \qquad 2\pi \mathrm{k} \frac{s}{r} \cos \delta;$$

en sorte que, pour l'obtenir, il suffira de remplacer dans la première le facteur k par le facteur k. On peut remarquer d'ailleurs que chacun des facteurs

$$k, \; \mathrm{k}$$

représente précisément ce que deviendrait le rayon de moyenne courbure de la surface des ondes ou de la surface caractéristique, correspondant au point D ou C, si, les dimensions de ces surfaces venant à décroître, le point D ou C se rapprochait de l'origine des coordonnées, en restant toujours situé sur la même droite OD ou OC, de manière que la distance OD ou OC se trouvât réduite à l'unité. »

ANALYSE ALGÉBRIQUE. — *Remarques sur un théorème de M. Jacobi; par* M. LIOUVILLE. (Extrait par l'auteur.)

« Le théorème sur lequel portent les remarques suivantes est précisément celui dont j'ai parlé dans le dernier *Compte rendu*, et dont j'ai indiqué une démonstration nouvelle fondée sur l'élimination. Sans altérer dans ce qu'elle a d'essentiel la méthode dont j'ai fait usage, on la présente aisément sous diverses formes plus ou moins simples et offrant plus ou moins d'intérêt. Mais il est un autre point de vue auquel j'attache assez d'importance et sous lequel on peut considérer aussi le théorème de M. Jacobi. Entrons à ce sujet dans quelques détails.

» La formule de M. Jacobi est, comme on l'a vu, une généralisation de la formule

$$\sum \frac{F_1(\alpha)}{f'(\alpha)} = 0,$$

où le signe $\sum$ s'étend à toutes les racines α de $f(\alpha) = 0$, $f'(\alpha)$ étant la

dérivée de $f(\alpha)$ et $F_1(\alpha)$ un polynome de degré inférieur à $f'(\alpha)$. Cette formule

$$\sum \frac{F_1(\alpha)}{f'(\alpha)} = 0$$

est bien connue des analystes : elle renferme implicitement la théorie de la décomposition des fractions rationnelles en fractions simples, puisqu'en posant $f(\alpha) = (\alpha - t)\varpi(\alpha)$, ce qui permet de substituer à l'équation $f(\alpha) = 0$, les deux équations $\alpha = t$, $\varpi(\alpha) = 0$, elle donne

$$\frac{F_1(t)}{\varpi(t)} = \sum \frac{F_1(t_r)}{(t - t_r)\varpi'(t_r)},$$

le signe $\sum$ ne s'étendant plus qu'aux racines t_r de $\varpi(t_r) = 0$. Réciproquement si l'on regarde comme connue la loi de décomposition des fractions rationnelles, il suffira de multiplier par t les deux membres de l'équation

$$\frac{F_1(t)}{f(t)} = \sum \frac{F_1(\alpha)}{(t - \alpha) f'(\alpha)},$$

puis de faire $t = \infty$, pour retrouver la formule

$$\sum \frac{F_1(\alpha)}{f'(\alpha)} = 0.$$

Cela posé, on doit être curieux de savoir si dans le cas général la formule de M. Jacobi peut encore être obtenue par des considérations semblables, c'est-à-dire peut encore être déduite de la méthode ordinaire de décomposition des fractions rationnelles. Or, on va voir qu'en effet la méthode dont il s'agit conduit à la formule citée, et même par une route assez facile.

» Désignons par $f(t, \mu)$, $F(t, \mu)$ deux polynomes, l'un de degré m, l'autre de degré n en t et μ: supposons ces polynomes complets et à coefficients quelconques, pour éviter les cas particuliers que l'on discutera, si l'on veut, plus tard. Désignons ensuite par $\varphi_1(t, \mu)$ un polynome de degré égal ou inférieur à $m + n - 3$, et considérons la quantité

$$\theta = \sum \frac{\varphi_1(t, \mu)}{f(t, \mu) \frac{dF(t, \mu)}{d\mu}},$$

où le signe $\sum$ s'étend à toutes les racines μ de l'équation $F(t, \mu) = 0$, lesquelles sont fonctions de la variable indépendante t. La somme θ, symétrique par rapport à ces racines, sera une fonction rationnelle de t, et

d'après ce qu'on a dit des degrés de f, F, φ_1, elle s'évanouira pour $t = \infty$; il en sera de même du produit θt; c'est ce dont on se convaincra en observant que pour des valeurs très-grandes de t, le rapport de chaque racine μ à la variable t devient sensiblement constant. Le dénominateur de la fraction rationnelle proprement dite à laquelle θ se réduit, n'aura d'ailleurs en général aucun facteur multiple. Pour décomposer cette fraction en fractions simples, il suffira donc de chercher les valeurs α de t pour lesquelles elle devient infinie : chacune de ces valeurs α donnera lieu à une fraction simple de la forme

$$\frac{a}{t - \alpha},$$

et dont le numérateur a représente ce que devient le produit $\theta(t - \alpha)$ lorsqu'on y fait converger t vers la limite α. Les valeurs de t qui rendent θ infinie doivent d'ailleurs évidemment vérifier, outre l'équation $\mathrm{F}(t, \mu) = 0$ qui a toujours lieu, une des deux équations

$$\frac{d\mathrm{F}(t, \mu)}{d\mu} = 0, \quad f(t, \mu) = 0;$$

mais on prouve aisément que les deux termes infinis qui se présentent dans la somme θ, lorsqu'on a à la fois

$$\mathrm{F}(t, \mu) = 0, \quad \frac{d\mathrm{F}(t, \mu)}{d\mu} = 0,$$

se détruisent entre eux, en sorte que cette somme conserve dans ce cas une valeur finie. Dès lors il faut se borner à considérer les deux équations

$$f(t, \mu) = 0, \quad \mathrm{F}(t, \mu) = 0,$$

dont nous représenterons en général les racines par $t = \alpha$, $\mu = \beta$.

» Si l'on donne à t une valeur $\alpha + \delta\alpha$ infiniment peu différente de α, la première de nos deux équations n'aura plus lieu, mais la seconde, qui s'applique à tous les cas, subsistera et servira à trouver la variation $\delta\beta$ que la racine μ éprouve en vertu de l'accroissement de t. En y faisant

$$t = \alpha + \delta\alpha, \quad \mu = \beta + \delta\beta,$$

appliquant le théorème de Taylor, et négligeant les infiniment petits du second ordre, elle donnera

$$\frac{d\mathrm{F}}{d\alpha}\delta\alpha + \frac{d\mathrm{F}}{d\beta}\delta\beta = 0, \quad \delta\beta = -\delta\alpha \cdot \frac{d\mathrm{F}}{d\alpha} : \frac{d\mathrm{F}}{d\beta},$$

ou l'on a écrit, pour abréger, F au lieu de $F(\alpha, \beta)$. D'un autre côté, quand on a $t = \alpha + \delta\alpha$, $\mu = \beta + \delta\beta$, le produit $\theta(t-\alpha)$ se réduit sensiblement à

$$\sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)\,\delta\alpha}{\left(\frac{df}{d\alpha}\,\delta\alpha + \frac{df}{d\beta}\,\delta\beta\right)\frac{dF}{d\beta}}\cdot$$

Remplaçant $\delta\beta$ par sa valeur, puis supprimant le facteur commun $\delta\alpha$, et posant

$$\frac{df}{d\alpha}\,\frac{dF}{d\beta} - \frac{df}{d\beta}\,\frac{dF}{d\alpha} = C(\alpha, \beta),$$

on trouve donc

$$\sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{C(\alpha, \beta)}$$

pour la valeur approchée du produit $\theta(t-\alpha)$, lorsque la différence $(t-\alpha)$ est très-petite. Quand $t=\alpha$, cette valeur devient rigoureuse, et fournit celle du numérateur a. Ainsi l'on a

$$\theta = \sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{(t-\alpha)\,C(\alpha, \beta)},$$

le signe $\sum$ s'étendant à tous les couples (α, β) de racines des équations simultanées $f(\alpha, \beta) = 0$, $F(\alpha, \beta) = 0$. Maintenant multipliez par t les deux membres de l'équation, puis faites $t = \infty$, ce qui réduira à zéro le produit θt : il vous viendra

$$\sum \frac{\varphi_1(\alpha, \beta)}{C(\alpha, \beta)} = 0\,;$$

c'est la formule de M. Jacobi pour les fonctions de deux variables; et l'on démontrera à peu près de même la formule de la page 415,

$$\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)}{D(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)} = 0,$$

et la formule générale dont celle-ci est déduite. Cette analyse fait en outre bien comprendre comment on peut obtenir la valeur de la somme

$$\sum \frac{\psi_1(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)}{\psi(\alpha, \beta, \ldots, \gamma)},$$

même quand le degré de ψ_1 est égal ou supérieur au degré de ψ. »

NOMINATIONS.

L'Académie procède, par voie de scrutin, à la nomination de deux Commissaires pour la révision des comptes de 1840. MM. Thenard et Duhamel réunissent la majorité des suffrages.

MÉMOIRES LUS.

GÉOLOGIE. — *Mémoire sur les étages inférieurs du terrain crétacé aux environs de Castellane* (Basses-Alpes); *sur les Bélemnites de ce terrain; par* M. **J. Duval-Jouve.**

(Commissaires, MM. Élie de Beaumont, Isidore Geoffroy-Saint-Hilaire, Milne Edwards.)

ANATOMIE COMPARÉE. — *Mémoire sur la direction de la circulation dans le système rénal de* Jacobson *chez les reptiles, et sur les rapports entre la sécrétion de l'urine et celle de la bile; par* M. **A. de Martino.**

(Extrait par l'auteur.)

(Commissaires, MM. Duméril, Isid. Geoffroy-Saint-Hilaire, Breschet.)

« Jacobson a montré que les reins des reptiles, outre les deux veines rénales internes qui donnent naissance à la veine-cave postérieure, possèdent aussi deux veines rénales externes qui, tirant leur origine des veines crurales, des veines hypogastriques et des veines caudales superficielles, marchent sous forme de deux troncs principaux sur le bord extérieur des reins, et poussent plusieurs ramifications à la surface inférieure de ceux-ci. D'un autre côté, les mêmes veines crurales, celles du tronc et du bassin, mais surtout les veines de la vessie urinaire, forment un autre système ayant pour centre la veine ombilicale (1). Celle-ci est une veine très-remarqua-

(1) La veine ombilicale est *unique* chez les Batraciens, les Protéides, les Salamandroïdes; elle est divisée en deux zones chez les Chéloniens, les Ophidiens, les Sauriens. Cuvier, *Leçons d'Anatomie comparée*, par M. Duvernoy.

ble, qui marche entre les muscles abdominaux et le péritoine jusqu'au foie, à chaque lobe duquel elle donne une branche qui s'anastomose avec les branches de la veine-porte. Ces deux systèmes veineux, celui des reins et celui du foie, ont donc une origine commune, et ils la tirent des veines de la queue, de celles des membres et de la partie postérieure du tronc, et des veines de la vessie urinaire.

» Jacobson donna la dénomination de *venæ renales efferentes* aux veines rénales internes, et celle de *venæ renales advehentes* aux externes : dénominations qui expriment les usages que l'anatomiste danois avait attribués aux deux ordres de veines rénales. En effet, Jacobson crut que les veines rénales internes (*efferentes*) versent le sang des veines dans la veine cave, à laquelle elles donnent naissance, et que les externes (*advehentes*) apportent aux reins le sang qu'elles tirent des veines crurales, des caudales et des veines du bassin.

» Cette doctrine, pour être vraie, suppose que les veines rénales externes conduisent réellement le sang veineux des membres postérieurs, de la queue, etc., dans les reins. Jacobson, dans son Mémoire, dit qu'au moyen d'expériences sur les animaux vivants, il s'est assuré que c'est la véritable direction de la circulation dans ces veines.

» Cependant il ne cite pas une seule de ces expériences.

» M. Duvernoy en appréciant justement l'importance de cette question, après avoir exposé les deux manières dont on peut envisager la marche du sang dans le système rénal de Jacobson, l'une inverse de l'autre, a entrepris à ce sujet quelques expériences chez les grenouilles vivantes : « Quoique nous ayons vu, dit-il, les veines *afférentes* se vider entre les » reins et la ligature, et les ramuscules des reins pâlir, nous n'avons » pas encore assez répété ces expériences pour nous décider absolument » en faveur de cette opinion. »

» L'importance extrême d'un tel sujet nous a engagé à reprendre les expériences de M. Duvernoy, dans la direction suivie par ce naturaliste; et nous les avons effectuées sur les grenouilles, les salamandres, les ophidiens et quelques chéloniens.

» Nous avons pris des grenouilles vivantes, et nous leur avons fait une incision à chaque flanc, en pénétrant jusqu'aux reins. Alors il nous a été facile de saisir les veines rénales externes, qui marchent au-dessous de la surface postérieure du péritoine, et avec un fil de soie très-fin nous les avons liées sur le milieu environ du tronc. Les grenouilles étaient vivaces

et irritables comme avant l'opération, et leur circulation générale ne se trouvait gênée en aucune manière. Dans ces expériences, répétées un grand nombre de fois, non-seulement sur les grenouilles, mais encore sur les *salamandres d'eau*, sur les *tortues* et sur *quelques serpents*, nous avons observé, et avec nous plusieurs de nos confrères, que le tronc de la veine rénale externe se gonflait constamment *au-dessous de la ligature*, tandis que les ramifications qui se répandent à la surface inférieure du rein se vidaient. La congestion du sang dans la partie postérieure du tronc veineux ainsi lié augmentait le diamètre de cette portion du canal d'une quantité qui allait presque au double, et la turgescence aurait surpassé cette limite sans une espèce de diversion à la marche du sang dans le tronc de la veine ombilicale, qui, comme nous l'avons déjà dit, a une origine commune en grande partie avec le tronc de la veine rénale externe. En effet, nous avons vu ce tronc ainsi modifié apporter au foie une quantité de sang plus grande que d'ordinaire, lorsque nous avions lié le tronc de la veine rénale externe : proposition que nous ferons ressortir encore davantage en traitant la question des rapports entre la sécrétion de l'urine et celle de la bile.

» Pour se convaincre que la veine rénale externe est afférente, on peut rendre l'expérience de la ligature encore plus simple : il suffit, pour cela, de saisir avec une pince très-délicate la veine rénale externe sur le milieu de son tronc; en peu de temps on le verra se gonfler au-dessous du point de la compression mécanique, et se vider *au-dessus*. Dans ce cas, aussitôt qu'on ôte la compression, la circulation se rétablit dans la direction du tronc au rein correspondant.

» Mais nous possédons encore un autre *criterium* tiré de l'observation directe, pour juger que la chose se passe réellement ainsi.

» Observons d'abord que chez la plupart des ordres de reptiles, comme chez les Protéides, les Batraciens et les Salamandroïdes, les parois des vaisseaux sont *transparentes*, de manière que nous pouvons étudier à travers leur épaisseur, et avec une simple loupe microscopique, la constitution globulaire et le cours du sang dans l'organisme de ces animaux vivants. En profitant de cette condition, nous avons pu observer la circulation des veines rénales de *Jacobson* chez les Salamandres et les Grenouilles, et nous l'avons vue tout aussi clairement que l'on pourrait voir la circulation du sang dans le réseau pulmonaire de ces mêmes animaux. Maintenant voici ce qui a lieu à l'égard de la direction du sang dans ce système de veines.

» Le courant du sang qui, chez les Grenouilles et les Salamandres, vient principalement des veines crurales, en arrivant vers le confluent des veines

rénales et de la veine ombilicale, se divise en deux portions : une qui, gagnant l'embouchure de la veine rénale externe, marche droit au rein correspondant, et suit les ramifications vasculaires de la veine sur les conduits urinifères; l'autre qui, suivant son cours jusqu'à la symphyse du pubis, mélange son sang avec celui qui y arrive en partie par les veines abdominales, et en partie par les veines de la vessie urinaire et par celles du bassin, et gagne le grand tronc de la veine ombilicale qui le conduit au foie. Ici nous remarquerons, en passant, que la vitesse de ces deux courants, celui de la veine rénale externe et celui de la veine ombilicale, est très-grande; elle semble à peu près égale à la vitesse du sang dans les autres veines du corps de ces reptiles. La physiologie a très-bien apprécié dans ces derniers temps le rôle que la force aspirante du cœur joue dans la circulation du sang par les veines; cependant cette force ne peut avoir une grande action ni dans le système rénal de *Jacobson*, ni dans celui de la veine-porte ombilicale; car ces deux systèmes n'amènent pas directement leur sang dans l'oreillette du cœur.

» Les résultats que nous avons obtenus au moyen de la ligature et de la compression sur le tronc de la veine rénale externe sont concluants; mais celui qui découle de l'observation pure sur la direction de la circulation dans cette veine, ne laisse plus aucun doute sur un tel sujet.

» C'est ainsi que l'expérience et l'observation, guidées par les considérations anatomiques, démontrent que le système rénal externe de Jacobson est un *système de veines afférentes*.

» Une autre question très-importante naît des considérations sur les liaisons anatomiques du système des veines-portes rénales avec le système de la veine ombilicale. L'origine de ces deux systèmes veineux est en grande partie commune, car les veines cutanées du tronc, les caudales et principalement les crurales, sont les sources de l'un et de l'autre système. Ces deux systèmes seraient-ils complémentaires? Pourraient-ils, jusqu'à un certain point, se remplacer dans leurs fonctions? M. *Duvernoy* a montré toute l'importance de cette question, et a entrevu la possibilité de la résoudre dans les termes suivants : « Il sera possible de s'assurer, par des » expériences, si ces explications sur la vie de sécrétion de ces animaux » sont fondées; s'il y a, en effet, un rapport aussi remarquable entre la » sécrétion de la bile et celle de l'urine; si, en un mot, les deux systèmes » peuvent, jusqu'à un certain point, se suppléer l'un l'autre. »

» Assurément la route qu'il faut tenir pour arriver à la solution de cette question consiste à faire en sorte que la quantité de sang qui doit nor-

malement se distribuer en partie au foie par la veine ombilicale, et en partie aux reins par les veines rénales externes, se dirigeât par un seul de ces systèmes, ou toute au foie, ou toute aux reins. Or, on ne peut obtenir cette condition qu'au moyen des ligatures des vaisseaux, et dans notre cas, la ligature doit tomber ou sur le tronc de la veine ombilicale, ou sur celui de la veine-porte rénale.

» Les résultats que nous avons obtenus sur les grenouilles démontrent, avant tout, que ces deux systèmes sont véritablement complémentaires l'un de l'autre par rapport à la distribution réciproque de leur sang.

» Maintenant on se demandera : y a-t-il une loi de compensation réciproque dans les fonctions de ces deux systèmes? On pourrait bien inférer la vérité de cette dernière loi de ce que nous venons de dire. Ayant prouvé la loi de *réciprocité* dans la distribution du sang de ces deux systèmes, si nous admettons que le sang apporté au foie par la veine ombilicale sert dans cet organe à la sécrétion de la bile, et que celui apporté au rein par la veine afférente serve à la sécrétion de l'urine, nous serons obligés d'admettre la *loi de réciprocité* de leurs fonctions, car le sang chargé de la sécrétion de la bile ne s'augmentera jamais dans le foie des reptiles sans entretenir une sécrétion plus abondante de bile; de même que celui de la veine-porte rénale ne s'augmentera jamais dans les reins sans procurer une sécrétion plus copieuse d'urine. Mais l'*hyperhémie* du foie, par le système de la veine ombilicale, produit par réciprocité l'*anhémie* du rein par le défaut correspondant de sang dans la veine rénale, *et vice versa;* par conséquent, toujours la sécrétion de la bile augmente par l'excès du sang de la veine ombilicale, et celle de l'urine diminue par le défaut du sang de la veine rénale externe. »

MÉMOIRES PRÉSENTÉS.

ZOOLOGIE. — *Considérations zoologiques, géologiques et géologico-géographiques sur les ammonites du terrain crétacé;* par M. ALCIDE D'ORBIGNY (1).

(Commissaires, MM. Alex. Brongniart, Flourens, Élie de Beaumont, Isidore Geoffroy-Saint-Hilaire, Milne Edwards.)

---

(1) L'indication de ce Mémoire a été oubliée dans le *Compte rendu* de la séance du 23 août 1841.

MÉTÉOROLOGIE. — *Des effets du calorique rayonnant; par* M. **Korilski**.

(Renvoyé à la Commission précédemment nommée.)

M. *Dufrénoy* présente un Mémoire de M. **Damour** sur la *Roméine*, substance minérale nouvelle, provenant de Saint-Marcel en Piémont.

« Ce minéral, composé essentiellement d'acide antimonieux et de chaux, remplit, dit M. Dufrénoy, une lacune dans la classification générale, car jusqu'ici on ne connaissait aucune combinaison de cet acide : il se trouve en petits cristaux octaèdres à base carrée. La couleur jaune-hyacinthe de la Roméine peut la faire confondre avec le zircon; mais sa faible dureté, jointe à l'odeur antimoniale qu'elle donne au chalumeau, dénote bientôt sa véritable nature.

» M. Damour l'a trouvée composée de la manière suivante :

		Oxygène.	Rapport.
Acide antimonieux......	0,7931	... 0,1576	3
Oxyde ferreux..........	0,0120	... 0,0027	} 1
Oxyde manganeux.......	0,026	... 0,0048	}
Chaux..................	0,1667	... 0,0468	}
Silice..................	0,0064		
	0,9998		

» L'acide contient donc près de trois fois autant d'oxygène que les bases réunies, ce qui conduit à adopter la formule

$$(\dot{C}a, \dot{M}n, \dot{F}a)^2 \ddot{S}b^3. »$$

CHIMIE ORGANIQUE. — *Recherches sur les résines; par* M. **Deville**.

(Extrait par l'auteur.)

(Commissaires, MM. Thenard, Chevreul, Dumas.)

« M. Deville communique les premiers résultats d'un travail qu'il a commencé sur les résines, et dont une partie, celle relative à l'une d'elles, le baume de Tolu, est complétement terminée.

» Le baume de Tolu renferme :

» I. Une essence que l'on sépare par distillation avec l'eau. Cette substance

très-complexe renferme : 1° une huile volatile, bouillant vers 170°, dont la composition est représentée par la formule $C^{48}H^{36}$; 2° de l'acide benzoïque tout formé, et qui s'y développe avec le temps et l'exposition à l'air; 3° une substance que toutes ses propriétés et sa composition élémentaire doivent faire considérer comme identique avec la cinnamine que M. Frémy a obtenue dans le traitement du baume de Tolu par la potasse alcoolique;

» II. De l'acide benzoïque et de l'acide cinnamique libres;

» III. Si l'on distille à feu nu le baume de Tolu, en prenant toutes les précautions que cette opération difficile exige à cause du boursouflement continuel des matières contenues dans la cornue, on obtient quatre produits différents bien nets :

» 1°. De l'acide benzoïque en quantité considérable;

» 2°. Dans les eaux-mères alcooliques de la cristillisation de cet acide on trouve une faible quantité d'acide cinnamique;

» 3°. Une substance huileuse, bouillant à 108°, dont la composition et la densité de vapeur conduisent, pour elle, à la formule $C^{28}H^{16}$, la même que celle que MM. Pelletier et Walter ont assignée à leur résinaphte. Le résinaphte et le benzoène ne doivent être considérés que comme isomériques, parce que leurs propriétés chimiques diffèrent essentiellement.

» Le benzoène donne avec l'acide sulfurique un acide dont la composition dans les sels est $C^{28}H^{14}, S^{2}O^{5}$, et à l'état cristallisé et libre $C^{28}H^{14}, S^{2}O^{5} + H^{6}O^{3}$.

» L'acide nitrique concentré produit à froid, avec le benzoène, une combinaison $C^{28}H^{12}, Az^{2}O^{4}$, et à chaud, après une action prolongée, une substance cristallisée de la forme $C^{28}H^{12}, Az^{4}O^{8}$.

» Le chlore agit très-vivement sur le benzoène. Cette action est même si intense que les premiers produits d'une chloruration successive de la substance disparaissent à mesure qu'ils se forment, de sorte que, pour les obtenir isolés, comme ils sont liquides, on ne sait à quel temps de l'opération s'arrêter. Cependant M. Deville a obtenu le plus volatil, qui est de la forme $C^{28}H^{14}Ch^{2}$. L'action du chlore étant prolongée, on obtient successivement $C^{28}H^{10}Ch^{6}, Ch^{2}H^{2}$, ensuite $C^{28}H^{10}Ch^{6}, Ch^{4}H^{4}$, puis $C^{28}H^{6}Ch^{10}, Ch^{6}H^{6}$. Ce dernier est cristallisé et représente par sa composition le chlorure de benzine de M. Péligot. Enfin le dernier terme de cette série est $C^{28}H^{4}Ch^{12}$. Il est cristallisé.

» 4°. Le baume de Tolu distillé produit enfin une dernière substance qui, par l'action des acides, donne de l'acide benzoïque, et sous l'influence de

la potasse donne du benzoate de potasse et de l'alcool. D'un autre côté elle a toutes les propriétés physiques et la composition de l'éther benzoïque. C'est donc de l'éther benzoïque.

» M. Deville a observé que la benzine, dans les mêmes circonstances qui donnent naissance avec le benzoène à la combinaison $C^{28}H^{12}Az^4O^8$, fournit aussi une combinaison cristallisée d'une grande beauté et de la forme $C^{24}H^8Az^4O^8$, ce qui complète l'analogie entre ces deux substances. »

THÉRAPEUTIQUE. — *De l'action chimique des sels les uns sur les autres envisagée sous le rapport de l'art de formuler; par* M. **Mialhe**. (Extrait par l'auteur.)

(Commissaires, MM. Magendie, Dumas, Pelouze.)

« On sait que le chlorhydrate d'ammoniaque en dissolution dans l'eau transforme le calomel en sublimé corrosif; que dans cette réaction il y a toujours du mercure métallique mis en liberté en quantité précisément correspondante au chlorure mercurique produit; enfin, que tous les chlorures alcalins partagent cette propriété avec le sel ammoniac.

» Je viens faire connaître aujourd'hui des résultats obtenus au moyen des chlorures alcalins et notamment avec le chlorure ammonique, le plus énergique d'entre eux.

» 1°. Le protoxyde et le bioxyde de mercure, mis en contact avec une solution aqueuse de chlorhydrate d'ammoniaque donnent tous deux naissance à du sublimé corrosif, ou, pour parler plus exactement, à du chlorure ammoniaco-mercuriel ou sel alembroth. La seule différence à noter, c'est que l'oxyde mercureux en produit beaucoup moins que l'oxyde mercurique, ce que la nature même du *prétendu* protoxyde explique suffisamment.

» 2°. Les proto- et les deutosels de mercure placés dans les mêmes circonstances produisent également du bichlorure de mercure, mais la quantité de sublimé qui apparaît dans ces deux cas est bien loin d'être la même : avec les sels mercuriques la proportion de sublimé est toujours infiniment plus considérable, elle est quelquefois même on peut dire énorme; tandis qu'avec les sels mercureux la quantité est toujours très-minime. L'explication de ce phénomène, éminemment important à signaler sous le rapport de la thérapeutique du mercure, est des plus faciles à énoncer : le

sel ammoniac et les bisels de mercure donnent lieu, par une double décomposition, à du deutochlorure de mercure et à un nouveau sel ammoniacal; tandis que les protosels mercuriels commencent par produire du protochlorure de mercure, et ce n'est que par une réaction subséquente qu'une très-faible proportion de sublimé corrosif se produit.

» De la connaissance de ce fait, on peut conclure que les deutosels de mercure doivent toujours être des médicaments très-énergiques, souvent même redoutables, tandis que les protosels, au contraire, constituent des médicaments d'une activité bien moindre et toujours à peu près inoffensifs. Plus tard j'apporterai un grand nombre de preuves en faveur de l'opinion que j'avance, alors que, comme conséquence de mes recherches, je serai appelé à discuter la valeur des formules médicales ayant pour base un composé mercuriel quelconque, car je les ai examinés tous.

» 3°. Le mercure métallique lui-même, mis en digestion avec une solution de sel ammoniac, se convertit en partie en sublimé corrosif. De là l'explication de l'action thérapeutique de ce corps simple introduit dans l'économie animale sous la forme métallique, explication qu'il eût été naguère impossible de donner, attendu que le mercure, pas plus qu'aucun autre métal, n'a d'action sur l'économie qu'autant qu'il a éprouvé quelque modification chimique propre à le rendre soluble.

» 4°. Il résulte donc de mes expériences, que les chlorures alcalins jouissent d'une énergie chimique plus puissante qu'on ne l'avait pensé jusqu'à ce jour, et que, dans bien des circonstances même, leur action est plus grande que celle de certains acides assez électro-négatifs, de l'acide chlorhydrique par exemple; on sait, en effet, que le chlorure d'hydrogène n'altère aucunement le mercure métallique, même à chaud; mais ce qu'on ne savait pas encore, c'est qu'il exerce à froid sur le calomel une action moindre que les chlorures précités.

» 5°. Enfin, toutes les réactions relatées plus haut ont lieu à la température ordinaire, et mieux encore à la température du corps humain; toutes se produisent dans un temps assez court : les unes même ont instantanément lieu, et la plupart ne demandent que quelques heures de contact pour s'effectuer. Or, comme les différents liquides contenus dans les organes de l'homme renferment du sel marin et du sel ammoniaque, accompagnés ou non d'acide chlorhydrique et autres acides qui peuvent encore faciliter leur mode d'action, il s'ensuit que tous les phénomènes que je viens de rapporter ont lieu dans le corps humain, quand on y ingère une pré-

paration mercurielle quelconque, c'est-à-dire qu'ils produisent tous une quantité variable mais constante de sublimé corrosif, composé qu'il est permis de considérer comme l'*anti-syphilitique mercuriel par excellence;* peut-être même est-ce l'unique parmi les préparations dont le mercure est la base? fait qu'il est de la plus haute importance de signaler à l'attention des praticiens, et dont la connaissance amènera, nous osons l'espérer, de grandes améliorations dans l'emploi rationnel d'un agent aussi précieux qu'énergique. »

CHIRURGIE. — *Mémoire sur la myopie et la disposition à la fatigue des yeux; par* M. BONNET.

(Commissaires, MM. Double, Roux, Breschet.)

CORRESPONDANCE.

CHIMIE. — *Note sur la farine fossile des Chinois; par* M. PAYEN.

« Les préoccupations scientifiques dirigées en ce moment vers les grandes questions de l'alimentation animale et végétale donnent un intérêt particulier à la communication faite dans la dernière séance par M. Arago, au nom de M. Stanislas Julien, relativement à la farine fossile des Chinois.

» Ayant été assez heureux pour recevoir de la part de M. Stanislas Julien et de M. Dumas des échantillons de cette substance, je me suis empressé de la soumettre à une étude attentive, dans l'espoir surtout de découvrir la présence et la nature des substances organiques qu'elle pouvait renfermer.

» Voici les observations que j'ai faites et les résultats que j'ai obtenus. La terre chinoise dite alimentaire est blanche, traversée de minces couches jaunâtres; douce au toucher, elle happe fortement à la langue et développe une odeur aromatique légère.

» Réduite en poudre et délayée dans l'eau chaude, sa couleur vire au jaune orangé; son odeur s'exalte beaucoup.

» L'alcool lui enlève une matière colorante jaune, et se charge d'un principe odorant qui, après l'évaporation à froid, rappelle la menthe poivrée. L'éther extrait des traces de matière grasse.

» Triturée avec deux fois son poids d'eau à 60° et $\frac{1}{2}$ volume d'ammonia-

que, elle donne par la filtration un liquide d'un beau jaune, qui, rapproché à sec, laisse un résidu organique dégageant par la putréfaction ou la chaleur les produits qui caractérisent les matières animales.

» La terre à l'état normal, mise à l'étuve dans un courant d'air, puis desséchée à 100° dans le vide, perdit 0,0623 ou 6,23 pour 100; alors soumise à la calcination au rouge, elle perdit encore 132 millièmes de son poids, et acquit une teinte rosée.

» Pendant qu'on l'échauffe à 100°, elle ne dégage pas sensiblement d'ammoniaque; mais calcinée en tubes clos, même après avoir été tenue pendant une heure dans le vide à 110°, elle se charbonne légèrement et dégage des vapeurs ammoniacales.

» Afin d'apprécier la quantité d'azote engagée dans la matière organique, je soumis la terre à l'analyse élémentaire, et j'obtins les résultats suivants:

Substance employée 3,563 — 0,221 eau = 3gr.,342,
Gaz azote = 6c.c.,5; température = 19°; pression = 76;

d'où l'on tire pour la proportion d'azote en poids 22 : 10,000.

» La partie non organique était assez remarquable par sa facile transformation sous le pilon en une poudre douce et homogène; sa composition paraissant devoir offrir quelque intérêt, j'en fis l'analyse en opérant sur la substance desséchée à + 100° dans le vide. En voici les résultats :

Silice	50,6
Alumine	26,5
Magnésie	9,1
Chaux	0,4
Oxyde de fer	0,2
Eau et matières organiques	13,2

» Ces nombres s'accordent avec une composition théorique admettant trois silicates d'alumine, de magnésie et de chaux, dans lesquels l'oxygène des bases serait égal à celui de la silice; mis sous cette forme, ils donneraient :

Silicate d'alumine	50,3
de magnésie	35,1
de chaux	1,2
Oxyde de fer	2
Eau et matières organiques	13,2

» L'oxyde de fer est en effet à l'état de liberté et en proportions variables, mais très-faibles, toujours dans les veinules jaunâtres.

» On peut conclure de ces expériences que la farine fossile contient réellement plusieurs substances organiques, bien qu'elle ne renferme pas de débris organisés discernables au microscope, suivant l'observation de M. Peltier.

» S'il n'est pas, par cela seul, évident qu'elle ait quelque propriété nutritive, cela n'est pas impossible du moins; mais en supposant même que cette propriété y fût proportionnée à l'azote combiné, on voit qu'elle équivaudrait au plus, sous ce rapport, au 100e de son poids en gluten de blé. Au reste les effets utiles qui, dans certaines circonstances, en ont été obtenus dépendraient peut-être de l'interposition de la substance inorganique qui agirait en complétant le volume des aliments ordinaires, et présentant sous une plus grande surface, aux membranes digestives, les substances nutritives avec lesquelles on les mélange; quoi qu'il en soit, l'action de cette terre comme amendement et engrais sur un sol sableux et calcaire semblerait moins douteuse encore. Là on concevrait que toute la matière organique pût être utilisée, puisque sa décomposition spontanée fournirait ces composés ammoniacaux nécessaires à l'entretien de la vie végétale : envisagée sous ce rapport, la question, plus simple, se résoudrait en attribuant au produit examiné, outre son effet comme amendement, une valeur égale au vingtième de son poids en fumier de ferme (1) frais et encore humide. »

ENTOMOLOGIE. — *Hémiptères recueillis par* M. le docteur **Le Guillou**, chirurgien-major de *la Zélée*.

(Commission précédemment nommée.)

Dans cette Note, M. Le Guillou donne la description de dix-sept nouvelles espèces d'hémiptères appartenant à diverses familles de cet ordre d'insectes. Trois de ces espèces lui paraissent susceptibles de former des coupes génériques nouvelles.

---

(1) Il n'en résulterait pas moins que cette terre isolément serait impropre à la végétation, comme la correspondance de Chine l'indique, car elle est beaucoup trop compacte pour avoir les qualités physiques des terres arables.

GÉOLOGIE. — *Études géologiques et botaniques sur les terrains tertiaires des environs de Rennes; par* M. **Payer**, professeur à la Faculté des Sciences de Rennes. (Extrait.)

(Commissaires, MM. Élie de Beaumont, Milne Edwards, Dufrénoy.)

« Sous le point de vue géologique, dit M. Payer, deux faits m'ont vivement frappé : c'est la superposition de calcaires analogues aux faluns de la Touraine sur d'autres analogues au calcaire grossier parisien, et la discordance de ces deux ordres de couches : l'inférieur plongeant de l'est à l'ouest sous un angle d'environ 45°, tandis que le supérieur est sensiblement horizontal.

» Sous le rapport botanique, les bassins de calcaire tertiaire de la Chaussairie et de Saint-Grégoire sont également très-remarquables. Toutes les observations que j'ai faites tendent à prouver que le calcaire n'a de plantes particulières à sa surface que parce qu'il s'échauffe plus facilement que les schistes environnants; car il en a d'autant plus qu'il est plus friable, et toutes celles que j'y ai rencontrées spécialement se retrouvent dans les schistes, mais plus au midi de la province, ou bien sur les côtes. »

M. Gaultier de Claubry et Choron, à l'occasion du procédé indiqué dans la précédente séance, par M. Ludwig Ornoch, pour l'extraction de la matière colorante du *Polygonum*, au moyen du ferment de bière, demandent l'ouverture du *paquet cacheté* qu'ils ont adressé le 21 octobre 1839, et dans lequel ils faisaient connaître un procédé semblable. La Note déposée contient les passages suivants :

« Quel qu'ait été jusqu'ici le procédé suivi, on n'a obtenu l'indigo du Polygonum qu'à l'état de mélange avec une quantité plus ou moins considérable de substances étrangères, si ce n'est par le traitement au moyen de l'éther pectique, comme l'a indiqué M. Robiquet, mais dont l'application est impossible sous le rapport industriel.

» Après un grand nombre de tentatives plus ou moins infructueuses, nous avons été conduits à l'emploi d'un procédé qui nous a offert une facilité que ne présente aucun autre, et nous a fourni l'indigo plus pur que par aucun de ceux qui étaient connus jusqu'ici.

» Les feuilles de Polygonum entières, soumises à ce genre de traitement, fournissent une petite quantité d'indigo, mais nous n'avons pu jusqu'ici

en obtenir une proportion comparable à celle que fournissent les mêmes feuilles après avoir été coupées en lanières.

» Les feuilles recueillies à un état de maturité convenable, sont divisées par le moyen d'un couteau et mises à macérer, à la température ordinaire, dans six fois leur poids d'eau, dans laquelle on ajoute $\frac{1}{20}$ à $\frac{1}{10}$ de levûre de bière que l'on divise soigneusement dans le liquide : après une macération de vingt-quatre heures au plus, on décante la liqueur qui, jetée sur un filtre, passe avec une teinte jaune-rougeâtre; on lave le résidu avec de petites quantités d'eau, en exprimant chaque fois la masse. »

M. Tranchant adresse une Note sur une machine qu'il a imaginée et à laquelle il a donné le nom de *Râteau-Brouette*. Un dessin accompagne la description qu'il donne de son appareil. L'objet de cet instrument est de remplacer le râteau de bois dont on fait usage pour ramasser les débris de fourrages laissés sur le sol après la fauchaison des prairies.

(Commissaires, MM. de Silvestre, de Gasparin, Séguier.)

M. Grimaud de Caux écrit relativement au nouveau moyen de puddler le fer ou d'affiner la fonte, dont il a été question dans les derniers *Comptes rendus* de l'Académie. Il annonce que M. le maréchal Marmont avait fait, un an auparavant, en Autriche, ce que M. d'Andelarre vient de faire en France.

M. Mallet répond à la réclamation de M. Houzeau-Muiron, relativement à l'épuration du gaz provenant de la distillation de la houille.

M. Mallet dit qu'il a traité cette question d'une manière toute spéciale, et qu'il emploie à cet effet précisément les sels de manganèse dont M. Houzeau ne parle pas. Il ajoute que dans peu de jours il fera à Paris l'application de ses procédés, et qu'on reconnaîtra qu'il est le premier qui soit parvenu à priver complétement le gaz de houille des sels ammoniacaux qu'il renferme.

M. Gondret prie l'Académie de vouloir bien nommer un Commissaire pour remplacer M. Savart dans la Commission chargée d'examiner son ouvrage sur l'emploi médical de la pression atmosphérique.

M. *Pouillet* remplacera M. Savart dans la Commission.

M. Passot prie M. le Président d'inviter la Commission chargée d'examiner son frein dynamométrique, à vouloir bien hâter son Rapport.

(Renvoyé à la Commission.)

M. **Leroy d'Étiolles**, à l'occasion de la communication faite dans la séance du 16 août par M. de Bouis, adresse une Note imprimée que lui a envoyée M. le docteur Ure. Cette Note a pour objet d'établir la part qu'il réclame dans la découverte de la transformation de l'acide urique en acide hippurique, sous l'influence de l'acide benzoïque. M. le secrétaire rappelle que le nom de M. Ure se trouve cité dans la lettre même de M. de Bouis.

MM. **Charles Morren** et **Auguste Morren** adressent un ouvrage intitulé : *Recherches sur la rubéfaction des eaux et leur oxygénation par les animalcules et les algues.* Nous en extrairons les propositions suivantes :

« L'oxygène de l'air de l'eau varie en quantité aux différentes heures de la journée. Par exemple, aux jours de grande insolation, la quantité d'oxygène est le matin de 24 p. 100; à midi, de 48 p. 100; et à cinq heures, de 60 ou même de 61. Cet effet est en relation avec la respiration des animalcules et des algues aquatiques.

» Parmi les corps qui produisent cet effet, se trouve un animalcule dont les auteurs ont fait une étude spéciale, et qu'ils ont appelé *Discerœa purpurea.* C'est un des corps nombreux qui colorent l'eau en rouge.

» MM. Morren ont examiné, en outre, le phénomène de la rubéfaction des eaux avec suite, et ils énumèrent quarante-deux plantes et animaux qui rougissent le liquide. Ils ont surtout examiné la *Monas vinosa* d'Ehrenberg, la *Monas rosea*, le *Trachelomonas volvocine*, l'*Euglena sanguinea*, les *Hœmatococcus* et les *Tessararthra*, dont ils ont donné des monographies. Selon eux, le fameux *Protococcus nivalis* des neiges serait un animal. »

L'Académie accepte le dépôt de trois *paquets cachetés*, présentés :

Le premier par M. **de Ruolz**, concernant l'action de la pile, et de nouvelles combinaisons d'or;

Le deuxième par M. **Denarss-Decanteleux**;

Le troisième par M. **Tanchon**.

La séance est levée à 5 heures. F.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

L'Académie a reçu dans cette séance les ouvrages dont voici les titres :

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie royale des Sciences; 2ᵉ semestre 1841, n° 8, in-4°.

Annales de Chimie et de Physique; par MM. GAY-LUSSAC, ARAGO, CHEVREUL, DUMAS, PELOUZE, BOUSSINGAULT et REGNAULT; 3ᵉ série, tome II, juillet 1841; in-8°.

Annales des Sciences naturelles; juin 1841; in-8°.

Recherches générales sur les vaisseaux tubuleux des végétaux; par M. GAUDICHAUD. (Extrait des *Annales des Sciences naturelles,* mars 1841.) In-8°.

Archives historiques et littéraires du nord de la France et du midi de la Belgique; tome III, 2ᵉ livraison; Valenciennes, in-8°.

Théorie des centres d'attraction; par M. DE LOS LLANOS MONTANOS; Paris, 1841, in-12.

Bulletin général de Thérapeutique médicale et chirurgicale; tome XXI, 3ᵉ et 4ᵉ livraison; in-8°.

Recueil de la Société polytechnique; juillet 1841; in-8°.

Clinique iconographique de l'hôpital des Vénériens; par M. RICORD; 1ʳᵉ livraison, in-4°.

Recherches sur la rubéfaction des eaux et leur oxygénation par les animalcules et les algues; par MM. AUGUSTE et CHARLES MORREN; Bruxelles, 1841, in-4°.

Essai sur les glaciers et sur le terrain erratique du bassin du Rhône; par M. DE CHARPENTIER; Lausanne, 1841, in-8°.

Bibliothèque universelle de Genève; juillet 1841, in-8°.

The Phonarthron... *Système naturel des sons du Langage; par* M. le Révérend W.-H. HENSLOWE; Londres, 1840, in-8°.

Elementi... *Éléments de Philosophie naturelle; par* M. A. LONGS; Naples, 1841, in-8°.

Academiche... *Programme de démonstration de Physique, d'Optique, etc.; par* M. L. BRENTA; Milan, 1841, broch. in-8°.

Gazette médicale de Paris; n° 35.

Gazette des Hôpitaux; n° 102—104.

L'Examinateur médical; n° 10.

Programme des prix proposés par la Société de Pharmacie de Paris; $\frac{1}{2}$ feuille in-8°.